מרתון - ליניארית 2 - 25.11

**מעבר בין בסיסים:**

נתונים 2 בסיסים: ונתון וקטור v בבסיס B.

סימון: מייצג את v בבסיס C.

אם אז הכוונה היא שמתקיים:

דוגמא: נתון הבסיס: והבסיס:

ונתון בבסיס .

העבירו את לבסיס .

פתרון: נפתור: ומכאן: ולכן: .

נתון , מצאו את .

פתרון: . ומכאן: ולכן: .

במקום לפתור את המערכת עבור כל וקטור שנרצה להעביר לבסיס נוכל פשוט לבנות מטריצת מעבר בין בסיס לבסיס ובכל פעם שנכפול אותה בוקטור המיוצג בבסיס , המכפלה תעביר אותו לבסיס .

מטריצת מעבר מבסיס לבסיס מסומנת כ: .

אם מכפילים אותה בוקטור המיוצג בבסיס הוא הופך להיות מיוצג בבסיס .

פורמאלית: .

איך מחשבים את המטריצה?

כל עמודה i במטריצת המעבר מ B ל C היא הוקטור ה i של B מיוצג בבסיס C.

דוגמא: נתון הבסיס: והבסיס:

אז: .

נחשב: ומכאן: ולכן: .

ומכאן: ולכן: .

סה"כ: .

נחזור לוקטור מהדוגמא הראשונה:

*נקבל: .*

***העתקות ליניאריות***

*פונקציה בין 2 מרחבים וקטוריים המקיימת את התכונות הבאות:*

1. *לכל .*
2. *לכל סקלר, .*

*דוגמא: כאשר: .*

*האם העתקה ליניארית? הוכיחו!*

1. *יהיו .   
   מכאן:*

*מצד שני:*

*נסדר ונקבל ששני הצדדים שווים.*

1. *יהיו .*

*מכאן:*

*מצד שני:*

*נסדר ונקבל ששני הצדדים שווים.*

* *מטריצה מייצגת העתקה:*

*מטריצה שאם נכפול אותה בוקטור מהתחום נקבל את התוצאה של הפעלת הפונקציה עליו.*

*מסומנת ב: .*

*איך מוצאים אותה? כאשר הוא הבסיס הסטנדרטי.*

*דוגמא: כאשר: .*

*נפעיל את ההעתקה על כל אחד מוקטורי הבסיס הסטנדרטי של .*

*ולכן: .*

*אם נכפיל בוקטור זה כמו להפעיל עליו את ההעתקה:*

*ומצד שני: .*

*מטריצה מייצגת בבסיס לבסיס :*

*הכוונה היא שההעתקה מקבלת וקטור בבסיס . מפעילה עליו את הפונקציה. ואת התוצאה מעבירה לבסיס .*

*כאשר:*

*איך מוצאים אותה?*

* *גרעין ותמונה של העתקה ליניארית:*

*גרעין: קבוצת כל הוקטורים בתחום (ב ) כך ש: .*

*תמונה: קבוצת כל הוקטורים בטווח כך שניתן לקבל אותם כתוצאה של הפונקציה.*

*דוגמא: אם . כאשר: .*

*גרעין: .*

*תמונה: .*

*דוגמא: אם . כאשר: .*

*גרעין: .*

*תמונה: .*

*תכונות:*

*גרעיון מסומן ב .*

*תמונה מסומנת ב .*

*תמיד מתקיים:*

1. *. הגרעין מוכל בתחום.*
2. *. התמונה מוכלת בטווח.*
3. *גם הגרעין וגם התמונה הם תתי מרחבים וקטוריים.*
4. *משפט המימדים:*

*כאשר: . (מימדים סופיים)  
כלומר מימד הגרעין + מימד התמונה = מימד התחום.*

*דוגמא: אם . כאשר: .*

*גרעין: . מימד: 1*

*תמונה: . מימד: 2*

*מימד התחום: 3*

***בסיס ומימד של גרעין ותמונה:***

*מציאת בסיס לגרעין: עלינו לפתור ולמצוא את מרחב הפתרונות ל: .*

*כלומר, זאת מערכת משוואות הומוגנית.*

*מדרגים את ומוצאים את דרגת החופש ואת הפתרונות.*

*דוגמא: כאשר: .*

*מצאו בסיס ומימד לגרעין.*

*פתרון: נמצא תחילה מטריצה מייצגת העתקה: .*

*נדרג ונמצא את מרחב הפתרונות:*

*מכאן: ולכן: ומכאן: ומכאן: ולכן:*

*מכאן הבסיס הוא: (בחרנו: ) והמימד הוא: 1.*

*מציאת בסיס לתמונה: עלינו למצוא את מרחב העמודות של .*

*כלומר מתייחסים לכל עמודה כוקטור, שמים את הוקטורים כשורות - עושים transpose*

*ואז בודקים אי תלות, מדרגים, והשורות שלא התאפסו הן הוקטורים של בסיס התמונה.*

*דוגמא: כאשר: .*

*מצאו בסיס ומימד לתמונה.*

*פתרון: נמצא תחילה מטריצה מייצגת העתקה: .*

*נהפוך את העמודות לשורות ונדרג: .*

*כלומר, הוקטורים הב"ת הם: וזהו הבסיס. מימד: 2.*

*העתקות חח"ע ועל:*

*משפט:*

*העתקה היא חח"ע אם ורק אם (מימד הגרעין הוא 0)*

*העתקה היא על אם ורק אם*

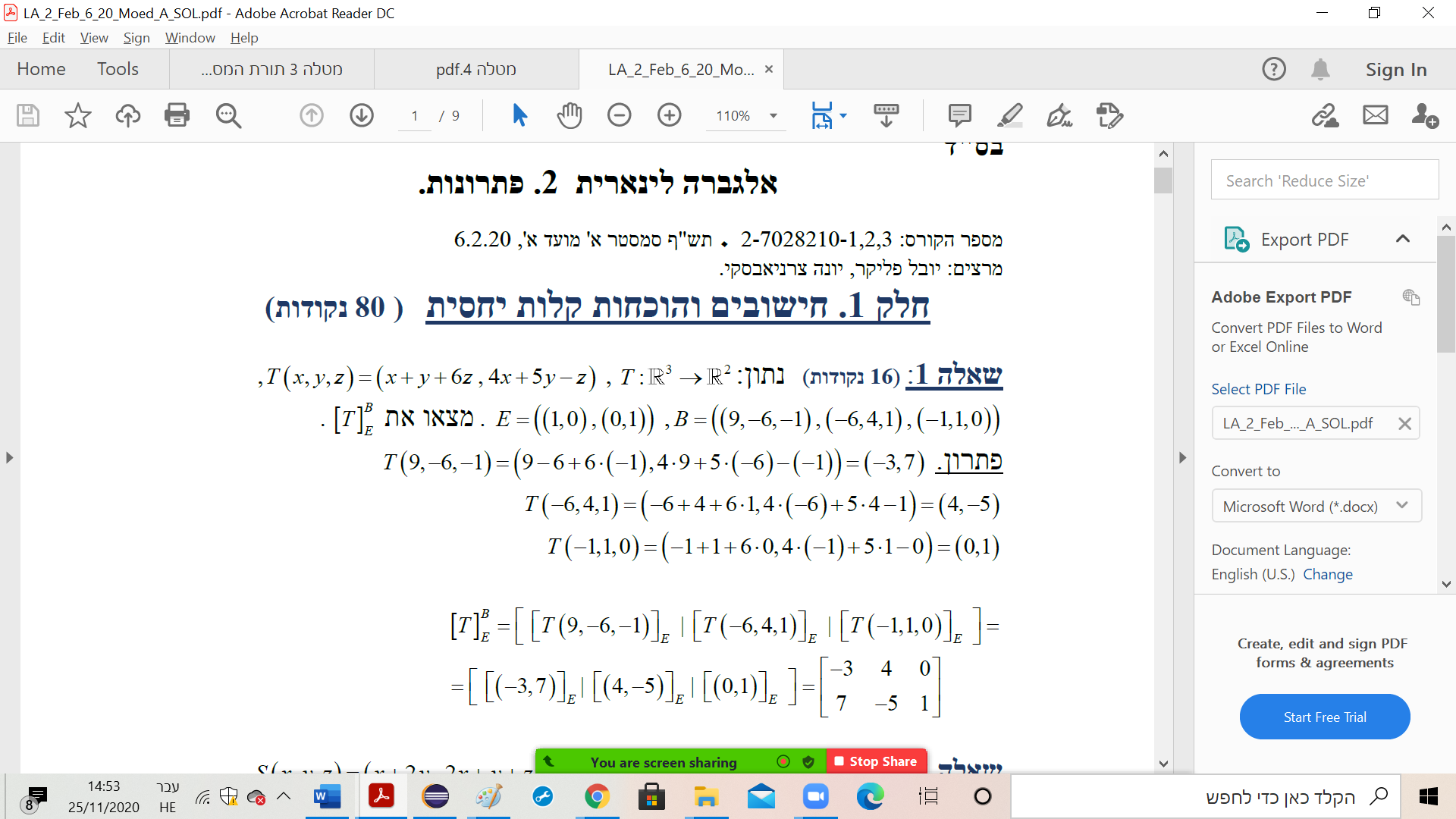
*(כל המשפטים מדברים על מרחבים במימדים סופיים)*

*העתקה ממרחב גדול למרחב קטן (במימד) לא יכולה להיות חח"ע.*

*העתקה ממרחב קטן למרחב גדול לא יכולה להיות על.*

*העתקה ממרחב למרחב באותו מימד היא חח"ע אם ורק אם היא על.*

*תרגילי מבחן:*



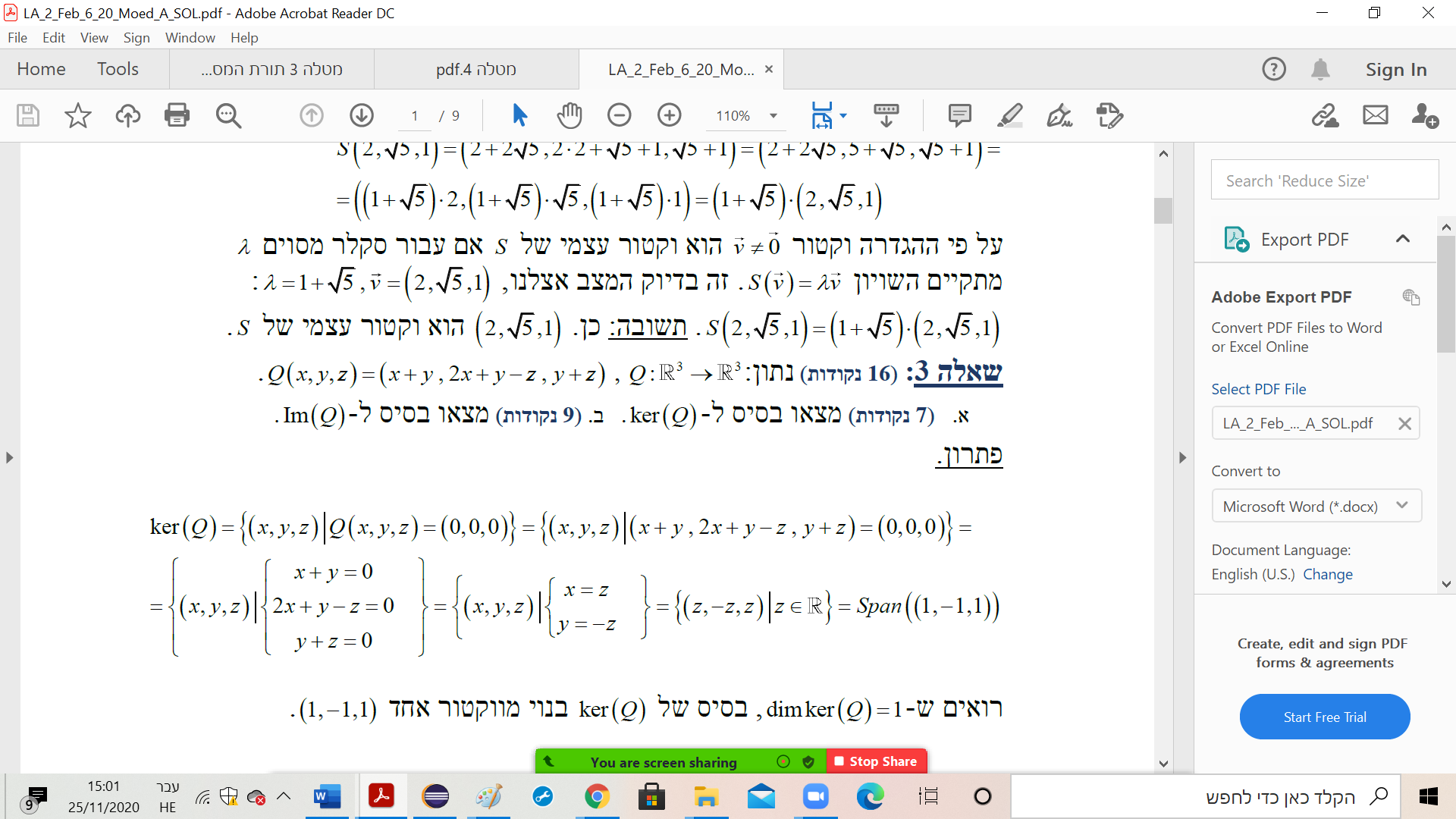
*פתרון: לפי ההגדרה:*

*נחשב:*

*ומכאן: ולכן: .*

*כל הוקטורים שהתקבלו הם כבר בבסיס ולכן סה"כ המטריצה היא:*

*.*



*פתרון:*

1. *נמצא מטריצה מייצגת: .*

*עבור בסיס לגרעין: נדרג:*

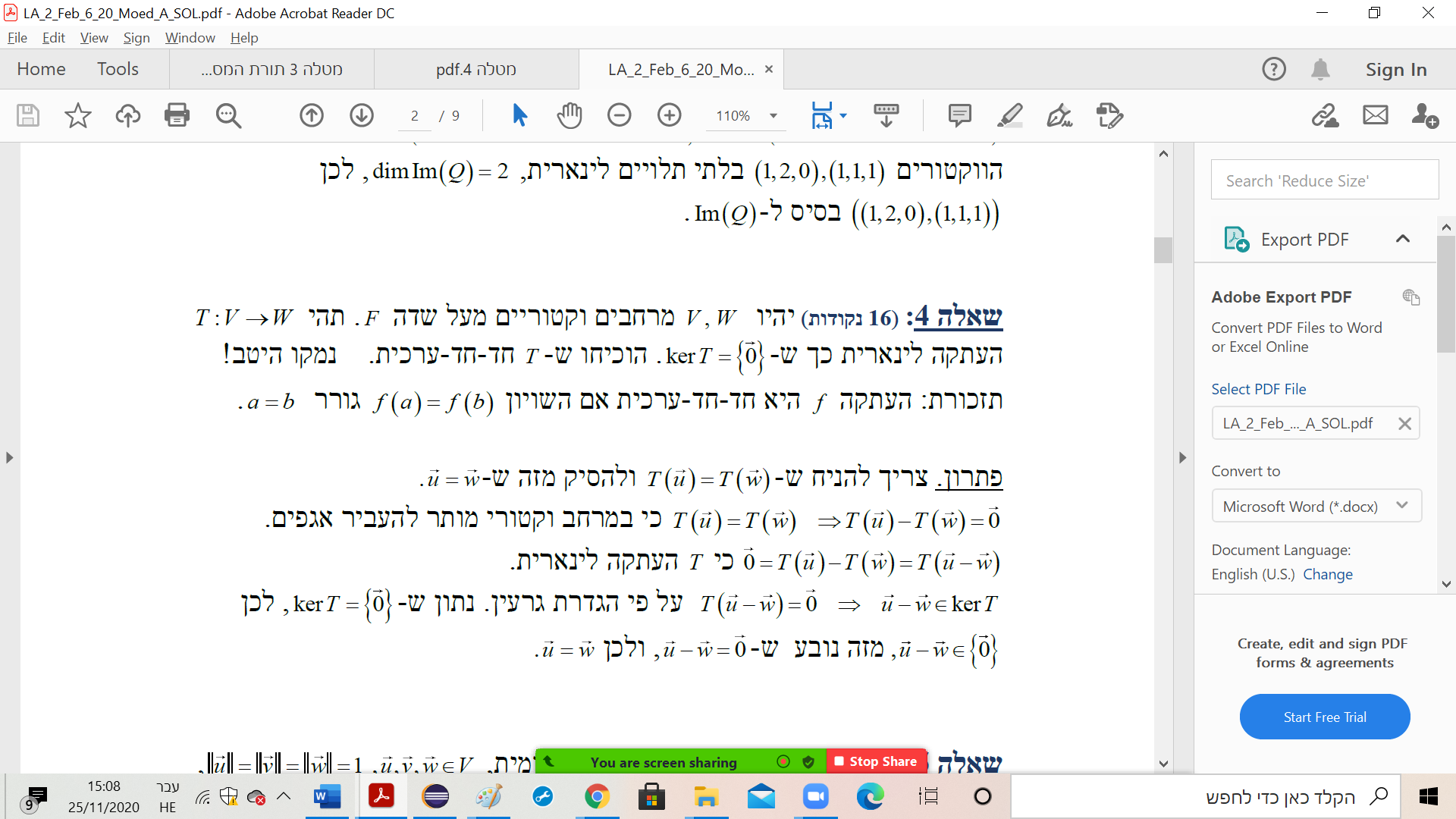
*מכאן: ולכן: ומכאן: ומכאן: .*

*ולכן בסיס לגרעין: ומימד 1.*

1. *נבדוק תלות בין וקטורי עמודות :*

*ומכאן הוקטורים ב"ת.*

*ולכן בסיס לתמונה: ומימד 2.*



*פתרון:*

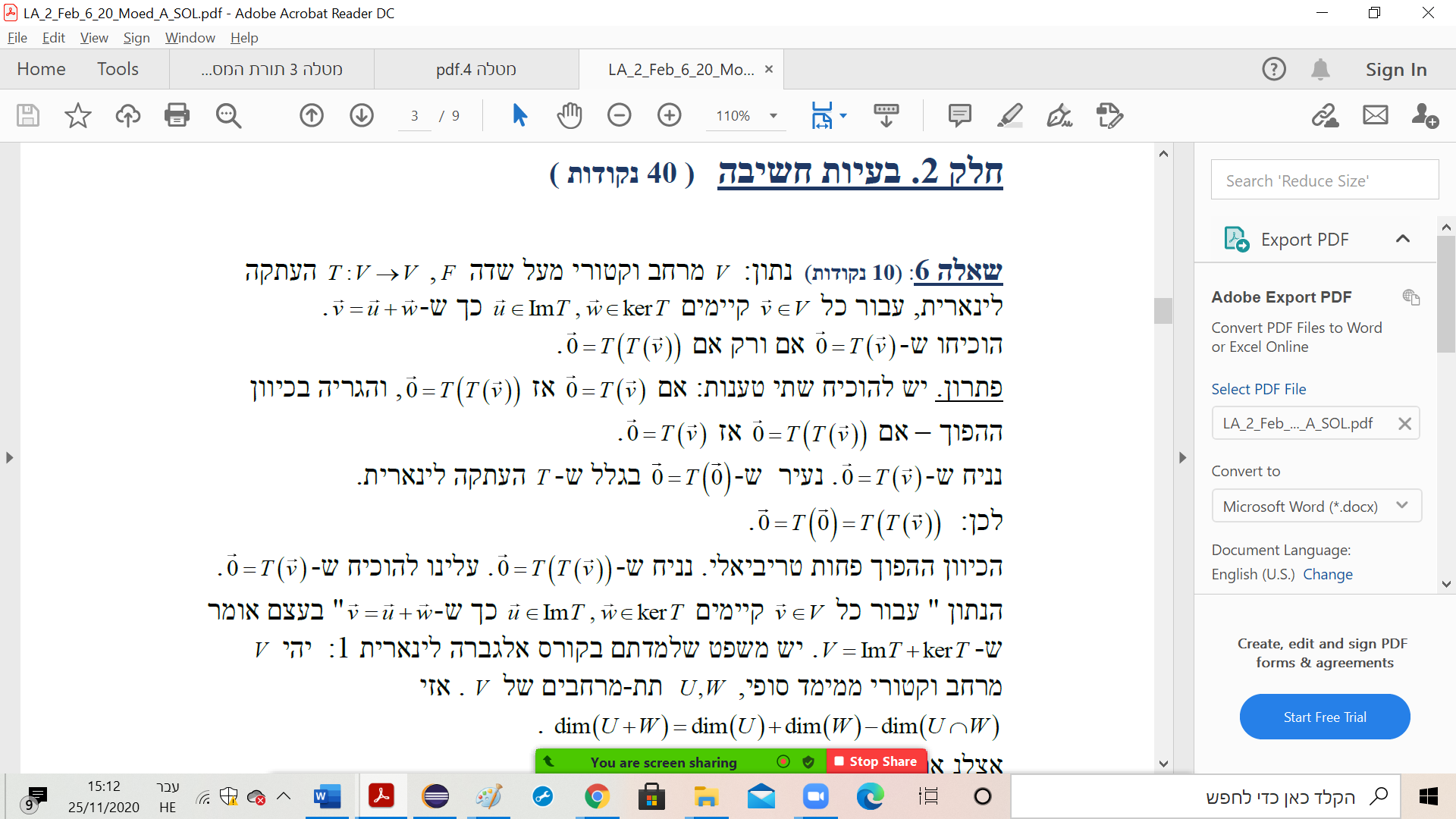
*יהיו ונניח כי . צ"ל: .*

*על פי ההנחה: .  
לפי תכונות העתקה ליניארית: .*

*לפי הגדרת גרעין, .*

*מכיוון שבגרעין יש רק את   לפי הנתון: .*

*נעביר אגפים: . מש"ל.*



פתרון:

כיוון 1: אם אז: . כי העתקה ליניארית.

כיוון 2: אם . לפי הנתונים, לכל קיימים כך   
ש: . לכן: .

לפי משפט המימדים מליניארית 1:

נובע ש:

מצד שני, לפי משפט המימדים מליניארית 2:

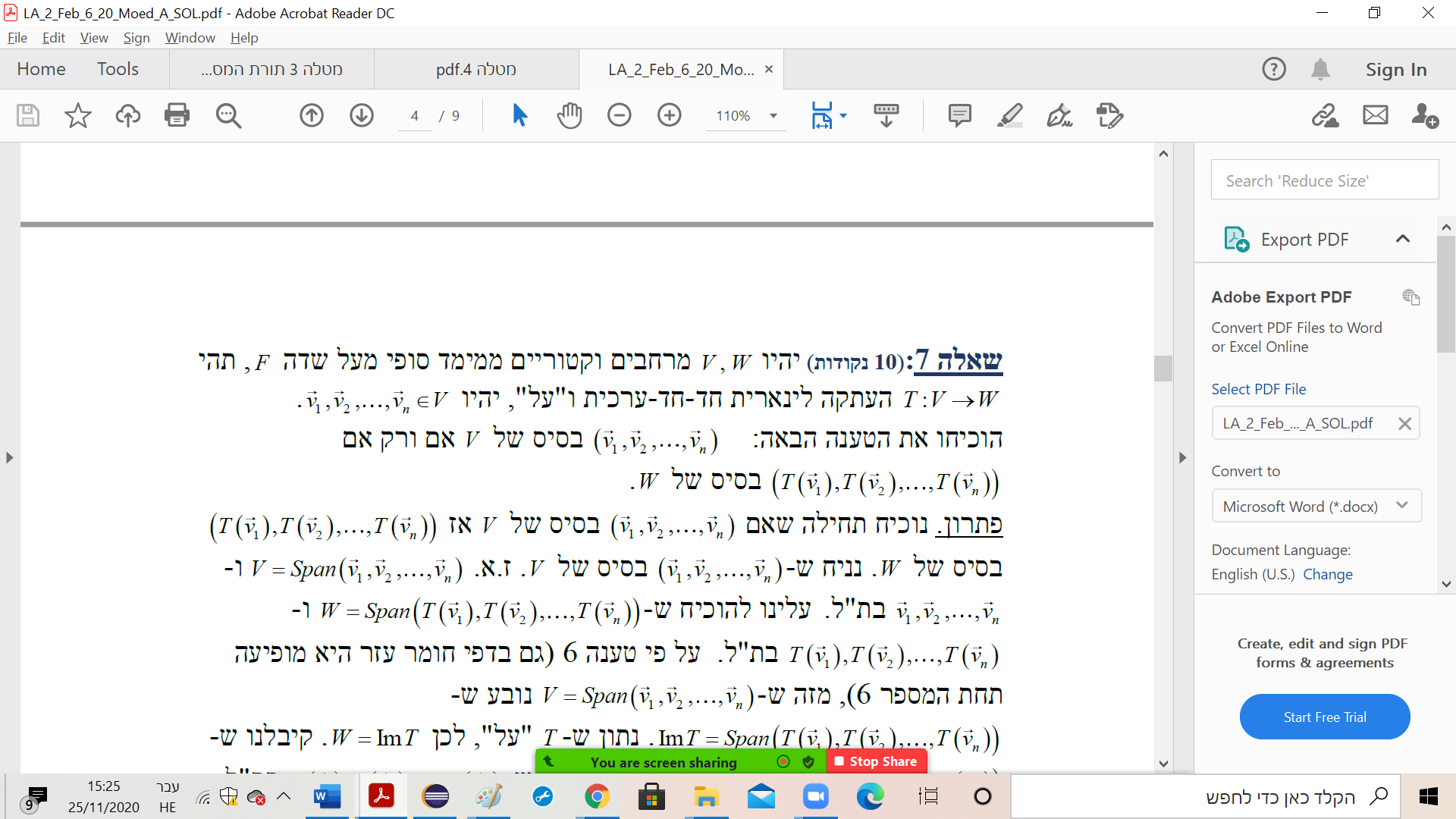
ולכן: .

מכאן, בחיתוך של הגרעין והתמונה יש רק את וקטור ה 0.

לפי הנתון: ולכן לפי הגדרת גרעין, .

מצד שני, הוא התוצאה של הפעלת T על v ולפי הגדרת תמונה, .

לכן: ולכן: .



פתרון:

כיוון 1: נניח ש בסיס של .

בת"ל: נניח ש: . צ"ל: .

לפי תכונות של העתקה ליניארית: .

לפי הגדרת גרעין: .

מכיוון ש חח"ע אז ולכן: .

לפי ההנחה,  *בת"ל כי הם בסיס ולכן: .*

*פרישה של : יהא .  
מכיוון ש היא על, קיים כך ש: .*

לפי ההנחה, פורשים את כי הם בסיס ולכן קיימים סקלרים בשדה כך ש: . נציב במקום ונקבל:

*.*

לפי תכונות העתקה ליניארית נקבל: .

קיבלנו צירוף של של הוקטורים ולכן הם פורשים את .

כיוון 2: נניח ש בסיס של .

בת"ל: נניח ש: . צ"ל: .

נפעיל העתקה ליניארית על 2 הצדדים ונקבל: .

לפי תכונות העתקה ליניארית נקבל: .

לפי ההנחה, בת"ל כי הם בסיס ולכן: *.*

פרישה של : יהא .

נפעיל עליו את ונקבל: עבור .

לפי ההנחה, פורשים את כי הם בסיס ולכן קיימים סקלרים בשדה כך ש: .

לפי תכונות העתקה ליניארית: .

נציב את ונקבל: .

חח"ע ולכן: .

קיבלנו צירוף של של הוקטורים ולכן הם פורשים את .

***ערכים עצמיים:***

*ע"ע של מטריצה הוא סקלר כך שיש וקטור המקיים: .*

*במילים אחרות, להכפיל מטריצה שלמה ב זה כמו להכפיל אותו בקבוע.*

*דוגמא: .*

*איך מוצאים ע"ע?*

*מגיעים לפולינום האופייני של המטריצה : ,משווים ל 0 ומוצאים את הפתרונות ל שהיא המשתנה במשוואה. כלומר פותרים את: .*

*דוגמא: מצאו ע"ע למטריצה: .*

*פתרון: נוריד מהאלכסון של ונקבל:*

*נחשב דטרמיננטה ונשווה ל 0:*

*פתרונות: .*

*לכן יש 2 ע"ע שונים שהם: .*